物理α・高３物理受講の諸君へ

新型コロナの影響で授業が延期になりましたので、授業で板書すること(＋α)をプリントにしました。

手書きで読みにくい箇所があるとは思いますが、自習の役に立てばと思っています。

質問があれば事務局を通してお願いします。

体調に注意して頑張ってください。

物理科　　　　阪上　貴夫

§0. はじめに

☒ 力学の理論構成

原理　ニュートンの３法則 ← 力の存在(*)

- 第1法則：慣性の法則
- 第2法則：運動方程式
- 第3法則：作用・反作用の法則

↓

力積と運動量変化	仕事と運動エネルギー変化	力のモーメントと角運動量
↓	↓	↓
運動量保存則	エネルギー保存則	角運動量保存則（ケプラーの第2法則）

(*) 自然界にどのような力があるかは与えられたものとする。
力学は、その力による物体の運動を論じる

§1. 運動方程式

物体の運動(位置変化)

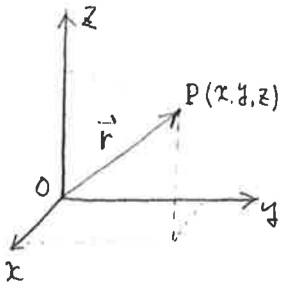
回転、変形は扱わない

⇒ 位置ベクトル 1つ

◻ 運動の記述のしかた(運動学)

定義 位置ベクトル : $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

↑ 時刻 t の関数であることを表す.



長さ(大きさ)

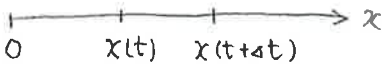
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

長さの単位

m (メートル)

1次元(x軸上)の運動

$$\vec{r}(t) = (x(t), 0, 0)$$



を考える

$t \sim t+\Delta t$ 間の平均速度

$$\bar{v} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

時刻 t での速度(瞬間速度)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

定義 （3次元での）速度：

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

$$= (v_x, v_y, v_z)$$

速さ（大きさ）

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

速度の単位

$\frac{m}{s}$ （sは秒）

運動状態を表す物理量

定義 加速度：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

加速度の単位

$\frac{m}{s^2}$

運動状態の変化を表す物理量

$$\underbrace{\text{位置} \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} \text{速度} \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}}\ \text{加速度}$$

高校物理では 加速度一定のときのみ

⇒ 等加速度運動の式

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

（v_0：初速度　r_0：はじめの位置）

$$\xrightarrow[\text{t消去}]{} \quad v^2 - v_0^2 = 2a(r - r_0)$$

(例え)

等加速度運動

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$ (一定) のとき

両辺 $t = 0$ ~ t まで積分

$$\int_0^t \frac{d\vec{v}}{dt}\,dt = \int_0^t \vec{a}\,dt$$

$$\text{左辺} = \left[\,\vec{v}\,\right]_0^t = \vec{v}(t) - \vec{v}(0)$$

ゆえ

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}\,dt$$

$$= \vec{v}(0) + \vec{a}t$$

代入

同様に

$$\int_0^t \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_0^t \vec{v}\,dt = \int_0^t \left(\vec{v}(0) + \vec{a}t\right)dt$$

$$= \vec{v}(0)\,t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\therefore\ \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(0)\,t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

原理　運動方程式

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i$$

または、合力を

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i = \vec{F}$$

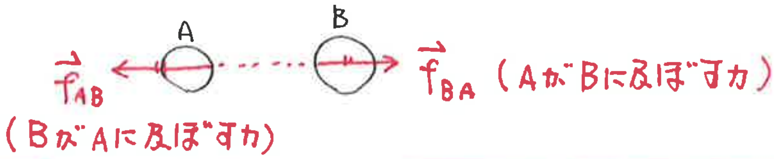
として

$$m\underbrace{\vec{a}}_{\text{力の結果として}\ m\text{に生じた加速度}} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{変化の原因として 物体}\ m\ \text{に外から加えられた力}}$$

注) ① 因果関係を表すと考えること。
② 運動方程式の成り立つ座標系を**慣性(座標)系**という。
③ 物体がつりあっているとき、加速度 0 ゆえ、$0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i$ となり、このときをとくに"つりあいの式"ともいうが、運動方程式の特別な場合にすぎない。

原理　作用・反作用の法則

$$\vec{f}_{AB} = -\vec{f}_{BA}$$



注) ① "つりあいの2力"と混同してはいけない。
② 物体同士が離れていても成り立つ。

力について（その1）

① 地表の重力

質量 m の物体は、地表での重力加速度の大きさを $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ として、鉛直下向きに大きさ mg の重力が働く。
（「重さ」or「重量」ともいう）

② 束縛力（拘束力）

- 張力 … 張っているひも（の内部）に生じる力
- 抗力 … 接する2物体間で接触面を介して及ぼしあう力
  とくに、面に垂直な成分を垂直抗力、平行な成分をまさつ力とよぶ。（力その2を参照）

これらは一般に未知数

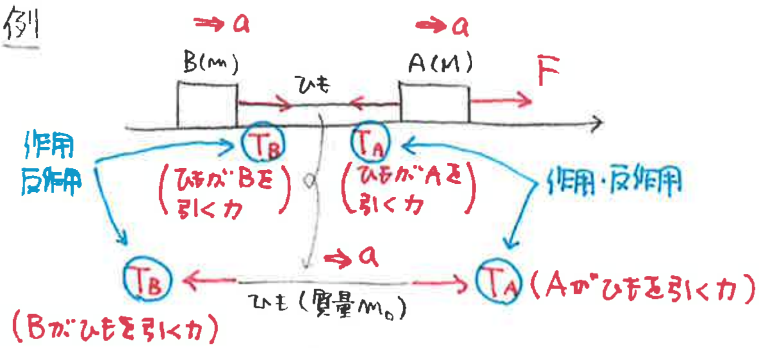
③ 力の単位

$$\mathrm{N}（ニュートン） = \mathrm{kg\frac{m}{s^2}}$$

kgW（キログラム重）＝ 1 kg の物体が地上で受ける重力の大きさ
$= 9.8\,\mathrm{N}$

注）力は何が何にふぼす力かをはっきりさせることが大切。

例



運動方程式

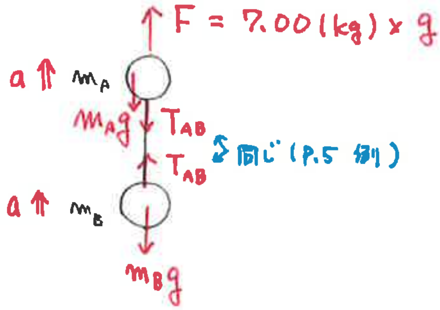
$$\begin{cases} A: & Ma = F - T_A & \text{—①} \\ B: & ma = T_B & \text{—②} \\ ひも: & m_0 a = T_A - T_B & \text{—③} \end{cases}$$

ひもの質量が無視できるとき $m_0 \to 0$ 　∴ ③より $T_A = T_B$

∴ 質量の無視できるひもの張力はどこでも同じ

1.

(1)



運動方程式

$$\begin{cases} A: & m_A a = F - m_A g - T_{AB} & \text{—①} \\ B: & m_B a = T_{AB} - m_B g & \text{—②} \end{cases}$$

①+②

$$(m_A + m_B)a = F - (m_A + m_B)g$$

A+Bを1個の物体と見たときの運動方程式

$$\therefore\ a = \frac{F}{m_A + m_B} - g = \frac{7.0\,[\mathrm{kg}] \times g}{(2.0 + 3.0)[\mathrm{kg}]} - g$$

$$= \frac{2}{5} g$$

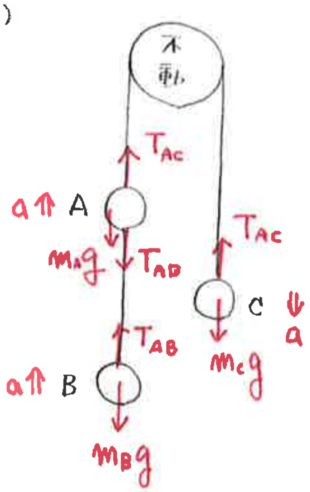
↖ 数値計算は単位を含めて行うこと!

(2) ②に代入して

$$T_{AB} = m_B(a + g) = 3.0\,[\mathrm{kg}] \times \frac{7}{5} \times 9.8\,[\mathrm{m/s^2}]$$

$$= 41\,[\mathrm{N}]$$

(3)



運動方程式

$$\begin{cases} A(\text{上向き正}): & m_A a = T_{AC} - T_{AB} - m_A g & \text{—③} \\ B(\ \text{〃}\ ): & m_B a = T_{AB} - m_B g & \text{—④} \\ C(\text{下向き正}): & m_C a = m_C g - T_{AC} & \text{—⑤} \end{cases}$$

③+④+⑤

$$(m_A + m_B + m_C)a = (m_C - m_A - m_B)g$$

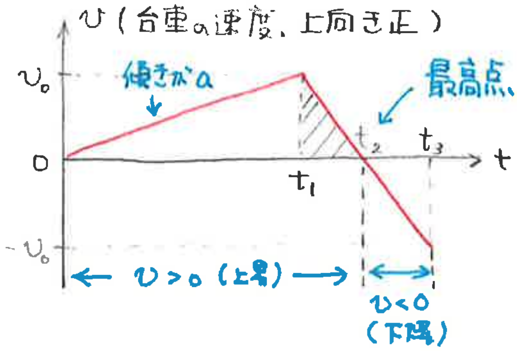
$$\therefore\ a = \frac{m_C - m_A - m_B}{m_A + m_B + m_C} g$$

$$= \frac{1}{6} g$$

④より

$$T_{AB} = m_B(a+g) = \underline{34[N]} \quad (4)$$

2.



◦ v−tグラフからわかること
① 時刻tの速度
② 傾きが加速度
③ 囲む面積が移動距離

(1) $\begin{cases} 0 \leqq t < t_2 : & v > 0 \quad \text{台車上昇} \\ t_2 < t : & v < 0 \quad \text{〃 下降} \end{cases}$

∴ $t = t_2$ で台車の速度の向き変わる

(2)(3)(4) 加速度 $a = \dfrac{dv}{dt}$ = グラフの傾き

$\begin{cases} 0 \leqq t < t_1 : & \underbrace{a_1 = \dfrac{v_0}{t_1}}_{(3)} > 0 \quad (\text{加速}) \\ t_1 < t < t_3 : & a_2 = \dfrac{-v_0 - v_0}{t_3 - t_1} = \underbrace{\dfrac{-2v_0}{t_3 - t_1}}_{(4)} < 0 \quad (\text{減速}) \end{cases}$

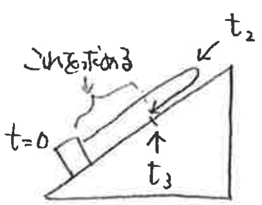
∴ $\underbrace{t = t_1}_{(2)}$ で加速度の向き変わる（ここでおもりが床につく）

(5) $\underbrace{x(t_2) - x(t_1)}_{t_1 \sim t_2 \text{間の移動距離}} = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$

= 上のグラフの斜線部の面積

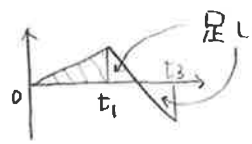
$= \dfrac{1}{2} v_0 (t_2 - t_1)$

(6)



$\underbrace{x(t_3) - x(0)}_{0 \sim t_3 \text{間の変位}} = \displaystyle\int_0^{t_3} v\,dt$

=



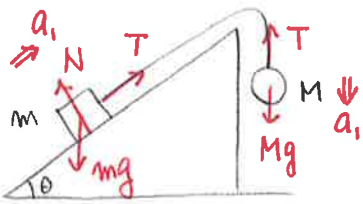
$$= \int_0^{t_1} v\,dt$$

= グラフの左の3角形の面積

$$= \frac{1}{2} v_0 t_1$$

次ページの注を参照

(7) ◦ $0 \leqq t < t_1$:



運動方程式

台車（質量 m）：斜面平行上向き正

$$m a_1 = T - mg\sin\theta \quad \text{—— ①}$$

おもり（質量 M）：鉛直下向き正

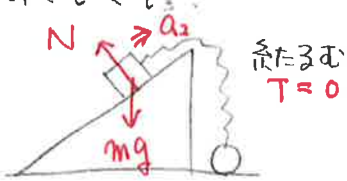
$$M a_1 = Mg - T \quad \text{—— ②}$$

① + ②

$$(M+m)\,a_1 = Mg - mg\sin\theta$$

$$\therefore\ a_1 = \frac{M - m\sin\theta}{M+m}\,g \quad \text{—— ③}$$

◦ $t_1 < t < t_3$:



台車の運動方程式

$$m a_2 = -mg\sin\theta$$

$$\therefore\ a_2 = -g\sin\theta \quad \text{—— ④}$$

他方、(3)(4) の答より

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{v_0}{t_1} = \dfrac{g}{4} \\ a_2 = \dfrac{-2v_0}{t_3 - t_1} = -\dfrac{g}{2} \end{cases} \qquad \left(\because\ t_3 = 2t_1 = \frac{8v_0}{g}\right)$$

④に代入

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

③に代入　$\therefore\ M = m$

4) (5)を考えるために

① 物理の問題で何をしていいかわからなければ原理にもどる。

力学の場合，力をさがして，運動方程式を書く。

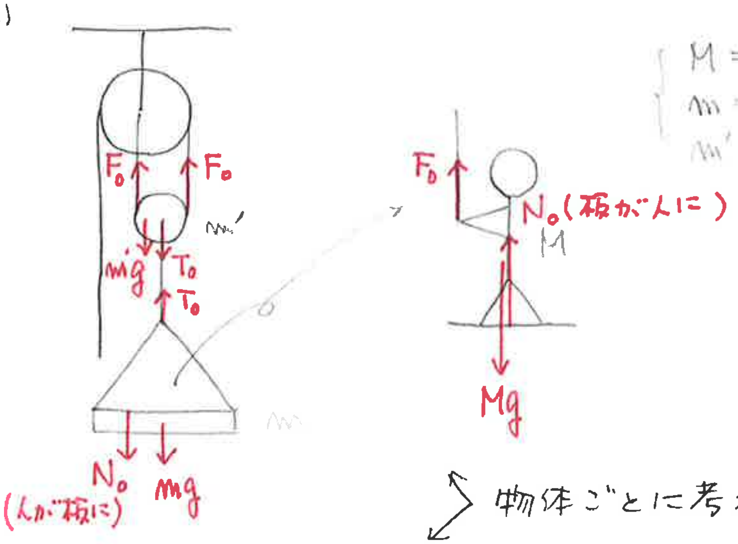
いまの場合，$0 \leqq t \leqq t_1$ と $t_1 \leqq t \leqq t_2$ で加速度が異なるので，それぞれの場合について書く。

② 物理の問題では，途中の問題がヒントになっていることが多い。

いまの場合，(3),(4)の答がヒントになっている

3.

(1)(2)



$M = 60\,\mathrm{kg}$
$m = 10\,\mathrm{kg}$
$m' = 8\,\mathrm{kg}$

物体ごとに考える

つりあい

$$\begin{cases} M: & 0 = F_0 + N_0 - Mg & \text{—— ①} \\ m: & 0 = T_0 - N_0 - mg & \text{—— ②} \\ m': & 0 = 2F_0 - T_0 - m'g & \text{—— ③} \end{cases}$$

①+②+③

$$0 = 3F_0 - (M + m + m')g$$

$$\therefore\ F_0 = \frac{1}{3}(M + m + m')g = 254.8\,\mathrm{N}$$

①に代入

$$N_0 = Mg - F_0 = \frac{1}{3}(2M - m - m')g$$

$$= 333.2\,\mathrm{N}$$

(3)(4)

$F_1 = \frac{3}{2} F_0$ のとき

運動方程式（上向き正）

$$\begin{cases} M : Ma = F_1 + N_1 - Mg & \text{—— ④} \\ m : ma = T_1 - N_1 - mg & \text{—— ⑤} \\ m' : m'a = 2F_1 - T_1 - m'g & \text{—— ⑥} \end{cases}$$

④ + ⑤ + ⑥

$$(M+m+m')a = 3F_1 - (M+m+m')g$$

$$\therefore a = \frac{3F_1}{M+m+m'} - g$$

$$= \frac{1}{2} g$$

$$= 4.9 \, m/s^2$$

④に代入

$$N_1 = M(a+g) - F_1$$

$$= \frac{1}{2}(2M - m - m')g$$

$$= 499.8 \, N$$